

सांख्यिकी (प्रश्न-पत्र II)

STATISTICS (Paper II)

समय : तीन घण्टे

Time Allowed : Three Hours

अधिकतम अंक : 250

Maximum Marks : 250

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें ।

इनमें आठ प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा हिन्दी और अंग्रेज़ी दोनों में छपे हैं ।

परीक्षार्थी को कुल पांच प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।

प्रश्न संख्या 1 और 5 अनिवार्य हैं तथा शेष बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के लिए नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

किसी प्रश्न का उत्तर देने के लिए जहाँ जरूरत हो, आँकड़े मान लीजिए तथा उसको स्पष्ट रूप से सूचित कीजिए ।

चार्ट/चित्र, जहाँ आवश्यक हो, प्रश्न के उत्तर देने की जगह पर ही अंकित किए जाएँ ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

There are **EIGHT** questions divided in **Two Sections** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.

Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in medium other than the authorized one.

Wherever any assumptions are made for answering a question, they must be clearly indicated.

Charts/figures, wherever required, shall be drawn in the space provided for answering the question itself.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

1.(a) निम्नलिखित को समझाइये :

- (i) स्वाभाविक सहन सीमायें
- (ii) परख नियंत्रण सीमायें
- (iii) विनिर्देश सीमायें
- (iv) अपरिवर्तित नियंत्रण सीमायें

Explain

- (i) Natural tolerance limits
- (ii) Trial control limits
- (iii) Specification limits
- (iv) Modified control limits

10

1.(b) दो चरों के किसी सामान्य फलन के लिए एक पल्याण बिंदु की परिभाषा दीजिए। किसी दो-व्यक्ति शून्य योग आयताकार खेल शुद्ध युक्तियों के लिए एक पल्याण बिंदु के अस्तित्व के लिए एक आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध को बताइये तथा सिद्ध कीजिए।

Define a saddle point for any general function in two variables. State and prove a necessary and sufficient condition for the existence of a saddle point in pure strategies for a two-person zero-sum rectangular game.

10

1.(c) किसी एकल प्रतिचयन आयोजना, $(N, n, c) = (50, 15, 1)$ के लिए 2% सदोष के साथ 50 वस्तुओं वाले प्रचयों के स्वीकरण की प्रायिकता की गणना कीजिए।

For a single sampling plan, $(N, n, c) = (50, 15, 1)$, compute the probability of acceptance of lots of 50 articles with 2% defective.

10

1.(d) किसी मार्कोव श्रृंखला में संक्रमण प्रायिकता आव्यूह को परिभाषित कीजिए तथा इसके कुछ गुणधर्मों को बतलाइये। तीन अवस्थाओं 0, 1 तथा 2 के साथ किसी मार्कोव श्रृंखला के लिए संक्रमण प्रायिकता आव्यूह निम्नलिखित है :

अवस्था

	0	1	2
अवस्था 0	0.4	0.3	0.3
अवस्था 1	0.4	0.4	0.2
अवस्था 2	0.2	0.4	0.4

$p_{00}^{(2)}$ तथा $p_{12}^{(3)}$ को प्राप्त कीजिए।

sth-d-stsc

Define a transition probability matrix of a Markov chain and state some of its properties. For a Markov chain with three states 0, 1 and 2, the transition probability matrix is given by

		State		
		0	1	2
State	0	0.4	0.3	0.3
	1	0.4	0.4	0.2
	2	0.2	0.4	0.4

Obtain $p_{00}^{(2)}$ and $p_{12}^{(3)}$.

10

- 1.(e) संकट फलन (hazard function) क्या है ? मान लीजिए कि किसी तंत्र का संकट फलन $h(t) = 3t^2$, $t \geq 0$ दिया गया है। तंत्र के लिए विश्वसनीयता फलन को प्राप्त कीजिए। अधःस्थ वंटन फलन का नाम क्या है ? वंटन के प्राचलों के नाम बताइये तथा उपरोक्त तंत्र के लिए उनके मानों को विनिर्देशित कीजिए।

What is hazard function ? Suppose a system has the hazard function given by $h(t) = 3t^2$, $t \geq 0$. Derive the reliability function for the system. What is the name of the underlying distribution function ? Name the parameters of the distribution and specify their values for the above system.

10

- 2.(a) किसी परिवहन समस्या में इसके एक सुसंगत हल के अस्तित्व के लिए एक आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध को प्राप्त कीजिए।

निम्नलिखित लागत आव्यूह वाली परिवहन समस्या (T.P.) का हल प्राप्त कीजिए :

		गंतव्य						
		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	प्राप्यता
उद्गम	O_1	2	1	3	3	2	5	50
	O_2	3	2	2	4	3	4	40
	O_3	3	5	4	2	4	1	60
	O_4	4	2	2	1	2	2	30
माँग		30	50	20	40	30	10	

Find a necessary and sufficient condition for the existence of a feasible solution to a Transportation Problem (T.P.).

Find the solution of the T.P. with following cost matrix :

		Destination						
		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	Availability
Origin	O_1	2	1	3	3	2	5	50
	O_2	3	2	2	4	3	4	40
	O_3	3	5	4	2	4	1	60
	O_4	4	2	2	1	2	2	30
Demand		30	50	20	40	30	10	

15

- 2.(b) बतलाइये कि किस प्रकार एक पंक्ति निदर्श को पूर्ण रूप से विनिर्दिष्ट किया जाता है। इस संदर्भ में, पंक्ति निदर्श (M/M/C) : (∞ /FIFO) में प्रयुक्त विभिन्न चिन्हों के अर्थ समझाइये।
निदर्श (M/M/I) : (∞ /FIFO) के अंतर्गत स्थायी दशा समीकरणों को प्राप्त कीजिए तथा इनके हलों को मालूम कीजिए।

State how a queueing model is completely specified. In this context, explain the meanings of different symbols used in the queueing model (M/M/C) : (∞ /FIFO). Obtain the steady-state equations under the model (M/M/I) : (∞ /FIFO) and find their solutions.

15

- 2.(c) (i) गणन प्रक्रम क्या है ? किसी गणन प्रक्रम के मूलभूत गुणधर्म क्या हैं ? नवीकरण प्रक्रम तथा नवीकरण फलन को परिभाषित कीजिए।
- (ii) यदि नवीकरण फलन $m(t) = 2t$, $t \geq 0$ है तो संबंधित नवीकरण प्रक्रम को प्राप्त कीजिए।
- (iii) मान लीजिए कि $X_1, X_2, \dots$, किसी नवीकरण प्रक्रम $\{N(t), t \geq 0\}$ के अंतर-आगमन समय हैं। मान लीजिए कि X_i समान वंटन वाले स्वतंत्र चर हैं जिनके वंटन $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$ हैं। $k = 6, 7$ तथा $t = 7.7$ के लिए $P(N(t) = k)$ को ज्ञात कीजिए। $N(7.7)$ के अन्य संभव मान क्या हैं ?
- (i) What is a counting process ? What are the basic properties of a counting process ? Define a renewal process and the renewal function.
- (ii) If the renewal function is $m(t) = 2t$, $t \geq 0$, find the corresponding renewal process.
- (iii) Suppose $X_1, X_2, \dots$ are the inter-arrival times of a renewal process $\{N(t), t \geq 0\}$. Assume that X_i s are independent and identically distributed with $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$. Find the $P(N(t) = k)$ for $k = 6, 7$ and $t = 7.7$. What are the other possible values of $N(7.7)$?

20

- 3.(a) $\bar{X}$ के लिए नियंत्रण चार्ट का निर्माण करने के लिए 4 आमाप के प्रतिदर्श लिए जाते हैं। केन्द्रीय रेखा 100 पर है तथा LCL तथा UCL क्रमशः 96 तथा 104 पर स्थित हैं। यदि मापा गया अभिलक्षण माध्य 98 तथा मानक विचलन 4 के साथ प्रसामान्य वंटन का अनुसरण करता है, तो क्या प्रायिकता होगी कि नियंत्रण चार्ट चौथे प्रतिदर्श पर अनियंत्रण के लिए चेतावनी देगा ?

Samples of size 4 are drawn to construct a control chart for $\bar{X}$. The central line is at 100 and LCL and UCL are at 96 and 104 respectively. If the measured characteristic is normally distributed with mean of 98 and standard deviation of 4, what is the probability that the control chart will raise an out-of-control alarm at the fourth sample ?

15

- 3.(b) जीवन परीक्षण में वाम, दक्षिण तथा स्वेच्छ खंड-वर्जन को समझाइये। इनमें से प्रत्येक प्रकार के लिए एक उदाहरण दीजिए। यह मानते हुए कि जीवन-काल, विफलता पर λ के साथ एक चरघातांकीय वंटन का अनुसरण करता है, निम्नलिखित दक्षिण खंड-वर्जित डाटा के लिए औसत जीवन-काल के अधिकतम संभावित आकलन को प्राप्त कीजिए :

$t_1 = 88, t_2 = 105, t_3 = 141, t_4 = 344, t_5 = 430, t_6 = 516, t_7 = 937, t_8 = 1057, t_i \geq 1100$
जहाँ $i = 9, 10, \dots, 15$ है।

Explain left, right and arbitrary censoring in life testing. Cite an example for each of these types. Assuming that the life time follows exponential distribution with failure rate λ , derive the maximum likelihood estimator for the average life time for the following right censored data :

$t_1 = 88, t_2 = 105, t_3 = 141, t_4 = 344, t_5 = 430, t_6 = 516, t_7 = 937, t_8 = 1057, t_i \geq 1100$
for $i = 9, 10, \dots, 15$. 15

- 3.(c) एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या क्या है और इसे किस प्रकार आव्यूहों के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है ?

निम्नलिखित प्रतिबन्धों के दिये होने पर

$$6x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 60$$

$$2x_1 - 4x_2 + 4x_3 \leq 40$$

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 60$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

सिम्प्लेक्स विधि का उपयोग करते हुए उद्देश्य फलन $Z = 3x_1 + 2x_2 + 6x_3$ का अधिकतमीकरण कीजिए।

What is a linear programming problem and how it can be represented in the form of matrix notations ?

Given the following constraints :

$$6x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 60$$

$$2x_1 - 4x_2 + 4x_3 \leq 40$$

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 60$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

maximize the objective function $Z = 3x_1 + 2x_2 + 6x_3$ using simplex method. 20

- 4.(a) विनिर्माण मर्दों के एक प्रक्रम के एक सामर्थ्य अध्ययन में विनिर्देश सीमायें 23.75 ± 0.1 हैं। उत्पादित इकाइयों में से लगातार आठ दिनों तक छः इकाइयों को प्रतिदिन चुना गया। प्राप्त मापों को निम्नलिखित सारिणी में 23 अधिक करके दिया गया है (अर्थात्, उदाहरणस्वरूप पहली कोष्ठिका में मान 0.77 को 23.77 पढ़ा जाना चाहिए)।

दिन	1	2	3	4	5	6	7	8
माप	0.77	0.80	0.77	0.79	0.75	0.78	0.76	0.76
	0.80	0.78	0.78	0.76	0.78	0.76	0.78	0.79
	0.78	0.76	0.77	0.79	0.78	0.73	0.75	0.77
	0.73	0.70	0.77	0.74	0.77	0.76	0.76	0.72
	0.76	0.81	0.80	0.82	0.76	0.81	0.81	0.78
	0.75	0.77	0.74	0.76	0.79	0.80	0.80	0.78

- (i) $\bar{X}$ तथा R चार्टों की रचना कीजिए ।
(ii) मशीन के प्रक्रम सामर्थ्य का अभिकलन कीजिए ।
(iii) क्या प्रक्रम विनिर्देशों को प्राप्त करेगा ?

(सारिणी के मान हैं : $A_2 = 0.48, D_3 = 0, D_4 = 2, d_2 = 2.534$)

In a capability study of a process involving manufacturing items, the specification limits are given as 23.75 ± 0.1 . From the manufactured items, six items were selected each day consecutively for eight days. The measurements obtained are given below in excess of 23. (That is, for example, the first cell value 0.77 should be read as 23.77).

Day	1	2	3	4	5	6	7	8
Measurements	0.77	0.80	0.77	0.79	0.75	0.78	0.76	0.76
	0.80	0.78	0.78	0.76	0.78	0.76	0.78	0.79
	0.78	0.76	0.77	0.79	0.78	0.73	0.75	0.77
	0.73	0.70	0.77	0.74	0.77	0.76	0.76	0.72
	0.76	0.81	0.80	0.82	0.76	0.81	0.81	0.78
	0.75	0.77	0.74	0.76	0.79	0.80	0.80	0.78

- (i) Construct $\bar{X}$ and R charts.
(ii) Compute the process capability of the machine.
(iii) Will the process meet the specifications ?

(The table values are : $A_2 = 0.48, D_3 = 0, D_4 = 2, d_2 = 2.534$)

20

- 4.(b) किसी मार्कोव श्रृंखला में n -सोपान संक्रमण प्रायिकता को परिभाषित कीजिए । निम्नलिखित चैपमैन-कोलमोगोरोव समीकरण को सिद्ध कीजिए :

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \sum_k p_{ik} p_{kj}^{(n)}$$

Define n -step transition probability in a Markov chain. Prove the following Chapman-Kolmogorov equation :

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \sum_k p_{ik} p_{kj}^{(n)}$$

15

- 4.(c) तात्क्षणिक माँग, कमियों तथा सतत् पुनः पूर्ति के साथ एकल-काल सतत् प्रायिकतात्मक सूची निदर्श की विवेचना कीजिए ।

माँग D का प्रायिकता वंटन निम्नलिखित दिया गया है :

$$f(D) = \begin{cases} 0.02 - 0.0002 D & , 0 \leq D \leq 100 \\ 0 & , D > 100 \end{cases}$$

रखरखाव लागत रु. 0.50 प्रतिदिन है तथा कमी की लागत रु. 3.20 प्रतिदिन है । माल-सूची के अनुकूलतम आदेश स्तर का निर्धारण कीजिए ।

sth-d-stsc

Discuss the single-period continuous probabilistic inventory model with instantaneous demand, shortages and continuous replenishment.

The probability distribution of demand D is given by

$$f(D) = \begin{cases} 0.02 - 0.0002 D & , 0 \leq D \leq 100 \\ 0 & , D > 100 \end{cases}$$

The holding cost is Rs. 0.50 per day and the shortage cost is Rs. 3.20 per day.

Determine the optimum order level of the inventory.

15

खण्ड 'B' SECTION 'B'

- 5.(a) स्थायी और स्थावर जनसंख्याओं के बीच विभेदन कीजिए ।
Distinguish between stable and stationary populations. 10
- 5.(b) पूर्वानुमान की बाक्स-जेनकिन्स विधि की संक्षेप में विवेचना कीजिए ।
Briefly discuss about the Box-Jenkins method of forecasting. 10
- 5.(c) बहुसंरेखता क्या होती है ? उसके परिणामों को बतलाइये ।
What is Multicollinearity ? Give its consequences. 10
- 5.(d) मृत्यु-दर के विभिन्न मापों को समझाइये ।
Explain different measures of Mortality. 10
- 5.(e) मनोवैज्ञानिक सांख्यिकी में, Z-समंक, मानक समंक तथा प्रसामान्यीकृत समंक क्या होते हैं ?
What is Z-score, Standard score and Normalised score in psychological statistics ? 10
- 6.(a) काल श्रेणी की परिभाषा दीजिए । इसके घटकों को बताइये तथा इनमें से प्रत्येक को समझाइये ।
Define Time series. Give its components and explain each of them. 15
- 6.(b) 2011 में एक शहर की लिंगवार-जनसंख्या का वंटन तथा अतिजीविता दरों के साथ जन्मों की संख्या निम्नलिखित सारिणी में दी गई है :

आयु वर्ग	जनसंख्या			जन्म			अतिजीविता
	पुरुष	स्त्री	कुल	पुरुष	स्त्री	कुल	
15-19	6145	5687	11832	65	60	125	0.91
20-24	5214	5324	10538	144	132	276	0.90
25-29	4655	4720	9375	135	127	262	0.89
30-34	3910	3933	7843	82	81	163	0.87
35-39	3600	3670	7270	62	56	118	0.85
40-44	3290	3025	6315	12	15	27	0.83
45-49	2793	2601	5394	3	3	6	0.82
योग	29607	28960	58567	503	474	977	

प्राप्त कीजिए :

- (i) सामान्य उर्वरता दर (जी एफ आर)
- (ii) आयु-विशिष्ट उर्वरता दर (ए एस एफ आर)
- (iii) कुल उर्वरता दर (टी एफ आर)
- (iv) सकल पुनरुत्पादन दर (जी आर आर)
- और (v) निवल पुनरुत्पादन दर (एन आर आर)

The sex-wise distribution of population and number of births along with survival rates of a town in 2011 are given below :

Age group	Population			Births			Survival rates
	Male	Female	Total	Male	Female	Total	
15-19	6145	5687	11832	65	60	125	0.91
20-24	5214	5324	10538	144	132	276	0.90
25-29	4655	4720	9375	135	127	262	0.89
30-34	3910	3933	7843	82	81	163	0.87
35-39	3600	3670	7270	62	56	118	0.85
40-44	3290	3025	6315	12	15	27	0.83
45-49	2793	2601	5394	3	3	6	0.82
Total	29607	28960	58567	503	474	977	

Find

- (i) General Fertility Rate (GFR)
- (ii) Age Specific Fertility Rate (ASFR)
- (iii) Total Fertility Rate (TFR)
- (iv) Gross Reproduction Rate (GRR)
- and (v) Net Reproduction Rate (NRR)

20

- 6.(c) परीक्षण समकों की विश्वसनीयता क्या होती है ? परीक्षण विश्वसनीयता के निर्धारण की परीक्षण-पुनर्परीक्षण विधि तथा समानान्तर रूप विधि को उनकी अच्छाइयों तथा कमियों को बताते हुए समझाइये ।

What is Reliability of Test Scores ? Explain Test-Retest method and parallel forms method of determining test Reliability mentioning their merits and limitations. 15

sth-d-stsc

- 7.(a) 2005-2010 की अवधि के दौरान किसी फैक्ट्री में अकुशल कर्मचारियों के प्रति घंटा औसत मजदूरी (रुपयों में) तथा 2005 में मुख्य सूचकांक को 100 मानकर तदनु रूप समय में ग्राहक मूल्य सूचकांक नीचे दिये गए हैं। 2005 की मजदूरी की तुलना में 2005-2010 में कर्मचारियों की वास्तविक मजदूरी को प्राप्त कीजिए :

वर्ष	2005	2006	2007	2008	2009	2010
प्रति घंटा औसत मजदूरी (रु.)	11.9	19.4	21.3	22.8	24.5	31.0
ग्राहक मूल्य सूचकांक	100	120.2	121.7	125.9	129.2	140

साथ ही 2005 में एक रुपये की तुलना में प्रत्येक वर्ष में एक रुपये के मूल्यों को भी प्राप्त कीजिए।

Given below are the average wage in Rupees per hour of unskilled workers of a factory during the period 2005-2010 and corresponding consumer price index numbers taken 2005 as base year with price index equal to 100. Determine the real wages of the workers during 2005-2010 compared with the wages in 2005.

Year	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Average wage per hour (Rs.)	11.9	19.4	21.3	22.8	24.5	31.0
Consumer Price Index	100	120.2	121.7	125.9	129.2	140

Also find the worth of one Rupee in each subsequent year compared to one Rupee in 2005. 15

- 7.(b) 2005 से 2009 के दौरान किसी वस्तु के प्रति किलोग्राम की त्रैमासिक रुपयों में कीमतों के आंकड़े नीचे दिये गये हैं :

वर्ष चतुर्थांश	2005	2006	2007	2008	2009
I	45	48	49	52	60
II	54	56	63	65	70
III	72	63	70	75	84
IV	60	56	65	72	66

सरल औसत विधि द्वारा ऋतुनिष्ठ सूचकांकों का अभिकलन कीजिए तथा अऋतुनिष्ठ मानों को प्राप्त कीजिए।

The data on quarterly prices in Rupees per kilogram of a commodity during 2005 to 2009 are shown below :

<i>Quarter \ Year</i>	2005	2006	2007	2008	2009
I	45	48	49	52	60
II	54	56	63	65	70
III	72	63	70	75	84
IV	60	56	65	72	66

Compute the seasonal indices by the simple average method and obtain deseasonalised values. 20

- 7.(c) लाजिस्टिक वक्र क्या है ? किसी जनसंख्या समंक में लाजिस्टिक वक्र के आसंजन की तीन चयनित बिंदुओं की विधि को समझाइये ।

What is logistic curve ? Explain the method of three selected points for fitting the logistic curve to a population data. 15

- 8.(a) एक विशेष प्रकार के कीटों की जनसंख्या के लिए निम्नलिखित वय सारणी को पूरा कीजिए, जहाँ x दिनों में उम्र है तथा $l_0 = 1000$ है :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
q_x	0.12	0.005	0.01	0.05	0.1	0.5	0.8	0.9	0.95

Complete the following life table of the population of a certain type of insects, x being age in days and $l_0 = 1000$:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
q_x	0.12	0.005	0.01	0.05	0.1	0.5	0.8	0.9	0.95

20

- 8.(b) भारत में सरकारी सांख्यिकीय प्रणाली के बारे में संक्षेप में विवेचना कीजिए ।

Briefly discuss about the official statistical system in India. 15

- 8.(c) सूचकांकों को परिभाषित कीजिए । इनके उपयोगों तथा परिसीमाओं को बतलाइये ।

Define Index Numbers. Give its uses and limitations. 15